به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

نمونه‌ی آزمون‌های ریاضی عمومی ۲

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۸۱—۸۰ مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه

۱. تابع $f(x,y)=xe^y$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

ب) اکسترممهای f را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x,y)|\, 0\leq x\leq 1-y^2\}$$

۲. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x,y که در معادله‌ی $f(cx-az,cy-bz)=0$ صدق می‌کند (a,b,c اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

۳. فرض کنید T ناحیه‌ی محصور به استوانه‌های $x^2+y^2-2y=0$ ، $x^2+y^2-4y=0$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی xoy باشد. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) حجم ناحیه‌ی T.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که S رویه‌ی بسته‌ی محصور کننده‌ی T است و $\mathbf{n}$ یکه‌ی نرمال قائم S رو به خارج است و $\mathbf{F}(x,y,z)=[x+\sin(yz)]\mathbf{i}+[y+e^{xz}]\mathbf{j}+[z+\sin(xy)]\mathbf{k}$.

۴. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ و صفحه‌ی $z+2y=1$ باشد که جهت حرکت روی آن از طرف مثبت محور z عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ با فرض

$$\mathbf{F}(x,y,z)=xz^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$$

۵. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\int\int_D v\ \cos(\frac{u}{v})\,dA$ که D ناحیه‌ی محدود به خطوط $v=u$ و $v=-u$ و $v=1$ می باشد.

ب) $\int\int_S (1-z)\ \cos(\frac{x-y}{x+y})\,d\sigma$ که S بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

«موفّق باشید»

۱ . فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & y\neq 0 \\[2ex] 2\,x & y=0 \end{cases}$$

الف) برای بردار یکه‌ی $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ ، مشتق سویی $D_u\,f(0,0)$ را محاسبه کنید.
(توجه کنید که تابع f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست)

ب) تمام سوهای $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی $D_u\,f(0,0)=1$ صدق می‌کنند.

۲ . فرض کنید $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع با تعریف $f\,(x,y)=x^3+y^3-3\,x^2$ باشد.

الف) اکسترمم‌های مطلق تابع f روی ناحیه‌ی $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1\,\}$ را بیابید.

ب) نشان دهید $\iint_D |f(x,y)|\ dA\leq 4\,\pi$.

۳ . فرض کنید T ناحیه‌ی محدود به داخل سهمیگون $z=x^2+y^2$ و خارج از مخروط $z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ باشد.

الف) ناحیه‌ی T را بر حسب مختصات استوانه‌ای و کروی مشخص کنید.

ب) حجم T را محاسبه کنید.

۴ . فرض کنید C منحنی رسم شده در شکل زیر باشد. مطلوب است

$$\int_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+4\,y^2}$$

۵ . فرض کنید S بخشی از سطح بیضیگون $4\,x^2+4\,y^2+z^2=5$ باشد که در ناحیه‌ی $z\geq 1$ قرار دارد و $\vec{n}$ قایم یکه‌ی بالایی بر سطح S باشد و $\vec{F}(x,y,z)=2\,x\,y\,z\ \vec{i}+(z-y^2z)\ \vec{j}+z^2\ \vec{k}$. مطلوب است

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ d\sigma$$

تنها به یکی از دو سوال ٦ و ٦′ پاسخ دهید !

٦ . فرض کنید D ناحیه‌ی محدود بین منحنی‌های $xy=\pi$ و $y=0$ و $x=1$ و $x=2$ باشد. مطلوب است

$$\iint_D x\ |\cos(xy)|\ dA$$

٦′ . فرض کنید $b>0$ و $0\leq c<d\leq a$ و A مساحت بخشی از سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد که بین صفحات $z=c$ و $z=d$ قرار دارد و B مساحت بخشی از سطح استوانه‌ی $x^2+y^2=b^2$ باشد که بین این صفحات قرار دارد. نشان دهید $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a}{b}$.

موفّق باشید.

۱ . فرض کنید C منحنی $y = \ln x$ باشد. مطلوب است

الف) تابع انحنای C و تعیین نقطه‌ای از C که دارای بیشترین انحناست.

ب) مرکز و شعاع انحنای C در نقطه $(۱, ۰)$.

۲ . فرض کنید S سطح دوار حاصل از دوران منحنی $x^۲ - z^۲ = ۱$ حول محور z ها باشد. مطلوب است

الف) معادله و نمودار سطح S .

ب) معادله‌ی خطوط واقع بر سطح S و مار بر نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$.

۳ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \ \sin x}{|x| + |y|} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) نشان دهید تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) تمام سوهای یکه‌ی $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$D_u\, f(۰,۰) = \nabla f(۰,۰) \cdot \vec{u}$$

۴ . معادله‌ی خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $z = x^۲ + y^۲$ و $۲x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۸$ را در نقطه‌ی $(۱, ۱, ۲-)$ مشخص کنید.

۵ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z به عنوان تابعی از متغیرهای مستقل x و y با معادله‌ی $x - y = f(z - x, z - y)$ داده شده باشد. نشان دهید

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

٦ . اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲(x + y)$ را روی ناحیه زیر پیدا کنید

$$D = \{ (x,y) \mid x^۲ + y^۲ \leq ۴,\ x \geq ۰,\ y \geq ۰ \}$$

مدت آزمون ۱۴۰ دقیقه .... موفّق باشید.

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{1 - 2t^2}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است. (۱۵ نمره)

---

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید. (۱۰ نمره)

---

۳) تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست. (۱۵ نمره)

---

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (۱۵ نمره)

---

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟ (۱۵ نمره)

موفق باشید

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II . فروردین ۱۳۸۵

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{۱ - ۲t^{۲}}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است.

پاسخ الف.

$$\vec{r'}(t) = \vec{i} + \vec{j} - \frac{۲t}{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}\vec{k} \quad , \quad \vec{r''}(t) = -\frac{۲t}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}\vec{k}$$

$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & -\frac{۲t}{\sqrt{۱-۲t^{۲}}} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۲t}{(\sqrt{۱-۲t^{۲}})^{۳}} \end{vmatrix} = -\frac{۲}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}\vec{i} + \frac{۲}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}\vec{j}$$

$$||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|| = \frac{۲\sqrt{۲}}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}} \quad , \quad ||\vec{r'}(t)|| = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}$$

درنتیجه $\kappa = \dfrac{||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)||}{||\vec{r'}(t)||^{۳}} = ۱$.

پاسخ ب. باید ثابت کنیم بردار قائم دوم خم، یک بردار ثابت است.

روش اول.

$$B = \frac{\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)}{||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)||} = \frac{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}{۲\sqrt{۲}}\left(-\frac{۲}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}\vec{i} + \frac{۲}{(\sqrt{۱ - ۲t^{۲}})^{۳}}\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$$

روش دوم.

$$T = \frac{\vec{r'}(t)}{||\vec{r'}(t)||} = \frac{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}{\sqrt{۲}}\vec{i} + \frac{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}{\sqrt{۲}}\vec{j} - \sqrt{۲}\vec{k}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sqrt{۲}t}{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}\vec{i} + \frac{-\sqrt{۲}t}{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}}\vec{j} - \sqrt{۲}\vec{k}$$

$$||\frac{dT}{dt}|| = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ - ۲t^{۲}}} \quad , \quad N = \frac{dT/dt}{||dT/dt||} = -t\vec{i} - t\vec{j} - \sqrt{۱ - ۲t^{۲}}\vec{k}$$

و درنتیجه

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{۱-۲t^{۲}}}{\sqrt{۲}} & \frac{\sqrt{۱-۲t^{۲}}}{\sqrt{۲}} & -\sqrt{۲}t \\ -t & -t & -\sqrt{۱ - ۲t^{۲}} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$$

یعنی B یک بردار ثابت.

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲} + y^{۲})$ روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{۲} : ۱ \leq x^{۲} + y^{۲} \leq e^{۲}\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

پاسخ. با توجه به این که $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$، معادله‌ی رویه را می توان به ازای $F(x,z) = z - \ln x$ یا $F(y,z) = z - \ln y$ به صورت $F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ در نظر گرفت.

پس می‌توان گفت S رویه‌ای است دوار که از دوران خم $z = \ln x$ به ازای $1 \leq x \leq e$ یا از دوران خم $z = \ln y$ به ازای $1 \leq y \leq e$ حول محور z—ها به دست آمده است.

۳) تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ الف . باید نشان دهیم

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, (x,y)\ (\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow |\frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0| < \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} |\frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0| &\leq 2|x|(\frac{x^2}{x^2+y^2})^2 + 3|y|(\frac{y^2}{x^2+y^2})^2 \\ &\leq 2|x| + 3|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

پس برای $\varepsilon > 0$ کافی است قرار دهیم $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$. در این صورت داریم

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta = \frac{1}{5}\varepsilon \Rightarrow 5\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow |\frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} - 0| < \varepsilon$$

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{2h^5}{h^5} = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{3h^5}{h^5} = 3$$

پاسخ ج. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت توابع α و β وجود دارند به قسمی که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \beta(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = 0$ و

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y$$

(برای سادگی به جای Δx از x و به جای Δy از y استفاده شده است.) بنابر این باید داشته باشیم

$$\frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} = 2x + 3y + \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y \ \ , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \beta(x,y) = 0$$

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x = t\ ,\ y = t$ داریم

$$\frac{2t^5 - 3t^5}{(t^2+t^2)^2} = 2t + 3t + \alpha(t,t)\ t + \beta(t,t)\ t$$

یا $-t = 5t + \alpha(t,t)\ t + \beta(t,t)\ t$

که با تقسیم دو طرف بر $t \neq 0$ این معادله هم ارز است با $-6 = \alpha(t,t) + \beta(t,t)$

اما این غیر ممکن است زیرا از $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \beta(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = 0$ نتیجه می‌شود $-6 = \lim_{t\to 0}(\alpha(t,t) + \beta(t,t)) = 0$.

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

پاسخ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2g'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$$

به این ترتیب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟

پاسخ الف. معادله‌ی ضمنی رویه‌ی S عبارت است از $F(x,y,z) = z - xy + y - 1 = 0$. پس

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\vec{k} = -y\,\vec{i} + (1-x)\,\vec{j} + \vec{k}$$

از سوی دیگر بردار نرمال صفحه‌ی π عبارت است از $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. بنابر این در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C به مختصات $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ داریم $\vec{n}\cdot\nabla F = (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})\cdot(-(3-t)\,\vec{i} + (1-t)\,\vec{j} + \vec{k}) = (t-3) + (1-t) + 2 = 0$.

پاسخ ب.

روش اول. در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n}\|\nabla F$ یعنی

$\frac{۱}{۲} = \frac{۱-x}{۱} = \frac{-y}{۱}$ پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

روش دوم . در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} \times \nabla F = \vec{۰}$ یعنی $\vec{۰} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -y & ۱-x & ۱ \end{vmatrix}$ یا $\vec{۰} = (۲x-۱)\vec{i} - (۱+۲y)\vec{j} + (۱-x+y)\vec{k}$. پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

۱. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است. کلیه‌ی بردارهای یکه چون $u=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ را مشخص کنید که برای آنها داشته باشیم $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u$.
(۱۰ نمره)

---

۲. اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x,y)=2+x^{2}+y^{2}$ را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار $D=\{\ (x,y)\ :\ \frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{9}\leq 1\ \}$ به دست آورید.
(۱۵ نمره)

---

۳. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین خطوط $x+y=1$ ، $x+y=2$ ، $x=0$ و $y=0$ است. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\iint_D \frac{(x-y)^{2}}{(x+y)^{3}}\,dA$$

(۱۵ نمره)

---

۴. فرض کنید D ناحیه‌ی درون مخروط $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ محصور توسط کره‌ی $x^{2}+y^{2}+(z-a)^{2}=a^{2}$ است ($a>0$ ثابت). مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال زیر (۱۵ نمره)

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}-3\right)dV$$

(بقیه‌ی پرسش‌ها، پشت برگه می‌باشند)

۵. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته هستند و $f(۰) = ۱$.
مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_C \Big(۲xf(y) + y^۲ g'(x)\Big)\, dx \;+\; \Big(x^۲ f'(y) + ۲yg(x)\Big)\, dy$$

که در آن C نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ پیموده شده از نقطه‌ی $A = (۰, ۰)$ به نقطه‌ی $B = (۲, ۰)$ است.

(۲۰ نمره)

---

۶. فرض کنید S بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ زیر صفحه‌ی $z = ۲$ است. برای

$$F(x, y, z) = (۸x + \sin(y^۲ z))\ \mathbf{i} + (۲y - e^{xz})\ \mathbf{j} - ٦z\ \mathbf{k}$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S F \cdot n\ d\sigma$ ، که در آن n قائم یکه‌ی رو به سمت خارج S است.

(۲۰ نمره)

---

۷. فرض کنید π صفحه‌ای با بردار نرمال یکه‌ی $n = a\ \mathbf{i} + b\ \mathbf{j} + c\ \mathbf{k}$ و γ مسیر بسته‌ی ساده‌ای در π است. برای میدان $F(x, y, z) = (bz - cy)\ \mathbf{i} + (cx - az)\ \mathbf{j} + (ay - bx)\ \mathbf{k}$ نشان دهید که مقدار $\frac{۱}{۲}\int_\gamma F \cdot dr$ برابر است با مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ی π که توسط منحنی γ محصور شده است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

پاسخ پرسش ۱.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

بنابراین $\nabla f(0,0)=(0,0)$ و در نتیجه $\nabla f(0,0)\cdot u=0$. (۳ نمره)

از طرف دیگر

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3a^2b}{t^2(a^2+b^2)}-0}{t}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}=a^2b \qquad \text{(۴ نمره)}$$

بنابراین $D_u f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u=0$ اگر و تنها اگر $a^2b=0$ (یعنی $a=0$ یا $b=0$).
به این ترتیب جهت‌های خواسته شده عبارتند از $\mathbf{i}$، $-\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $-\mathbf{j}$. (۳ نمره)

پاسخ پرسش ۲. برای تابع $f(x,y)=2+x^2+y^2$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

بنابر این

$$\nabla f=0\Rightarrow x=y=0$$

پس $P_0=(0,0)$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.
از سوی دیگر

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=2 \ , \ B=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=2 \ , \ C=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)=0$$

پس $\Delta(P_0)=AC-B^2=4>0$. بنابر این f در P_0 یک مینیمم نسبی دارد. (۵ نمره)

روی مرز ناحیه‌ی D از روش تکثیرکنندگان لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$H(x,y,\lambda)=2+x^2+y^2-\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1)$$

دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$1)\quad H_x=2x-\lambda\frac{x}{2}=0$$

$$۲) \quad H_y = ۲y - ۲\lambda \frac{y}{۹} = ۰$$

$$۳) \quad H_\lambda = \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} - ۱ = ۰$$ (۴ نمره)

از معادله‌ی اول $x = ۰$ یا $\lambda = ۴$ و از معادله‌ی دوم $y = ۰$ یا $\lambda = ۹$ به دست می‌آید. به ازای $x = ۰$ از معادله‌ی سوم $y = \pm ۳$ و به ازای $y = ۰$ از معادله‌ی سوم $x = \pm ۲$ به دست می‌آید.

بنابر این جواب‌های دستگاه عبارت است از

$$x = ۰ \ , \ y = ۳ \ , \ \lambda = ۹ \ \Rightarrow \ P_۱ = (۰, ۳)$$

$$x = ۰ \ , \ y = -۳ \ , \ \lambda = ۹ \ \Rightarrow \ P_۲ = (۰, -۳)$$

$$x = ۲ \ , \ y = ۰ \ , \ \lambda = ۴ \ \Rightarrow \ P_۳ = (۲, ۰)$$

$$x = -۲ \ , \ y = ۰ \ , \ \lambda = ۴ \ \Rightarrow \ P_۴ = (-۲, ۰)$$ (۴ نمره)

از $f(P_۱) = f(P_۲) = ۱۱$ ، $f(P_۳) = f(P_۴) = ٦$ و $f(P_۰) = ۲$ نتیجه می‌شود $P_۱$ و $P_۲$ ماکزیمم مطلق و $P_۰$ مینیمم مطلق f روی D هستند. (۲ نمره)

پاسخ پرسش ۳. با انتخاب $x + y = u$ و $x - y = v$ خواهیم داشت

$$y = \frac{۱}{۲}(u - v) \quad , \quad x = \frac{۱}{۲}(u + v)$$

بنابراین

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix} \right| = \frac{۱}{۲}$$ (٦ نمره)

مرزهای ناحیه‌ی جدید D^* حاصل از تغییر مختصات (x, y) به (u, v) عبارت است از

$$x = ۰ \Rightarrow u + v = ۰ \Rightarrow v = -u \quad , \quad y = ۰ \Rightarrow u - v = ۰ \Rightarrow v = u$$

و نیز

$$۱ \leq x + y \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq u \leq ۲$$

به این ترتیب

$$D^* = \{(u, v) \ : \ ۱ \leq u \leq ۲ \ \ , \ \ -u \leq v \leq u\}$$ (۴ نمره)

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3} dA &= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-u}^{u} \frac{v^2}{u^3} dv\; du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{v^3}{3u^3}\Big|_{v=-u}^{v=u}\; du \\
&= \frac{1}{3}\int_1^2 \; du \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$
(۵ نمره)

پاسخ پرسش ۴. از تعریف ناحیه‌ی D دیده می‌شود که استفاده از مختصات کروی مناسب‌تر است. از حل دستگاه

$$
\begin{cases}
x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2 \\
z = \sqrt{x^2+y^2}
\end{cases}
$$

نتیجه می‌شود $z=a$ ، یعنی مخروط و کره یکدیگر را در دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ و $z=a$ قطع می کنند. در ناحیه‌ی D ، تغییرات ϕ به صورت $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ و تغییرات θ به صورت $0 \le \theta \le 2\pi$ می‌باشد. در ضمن معادله‌ی $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ در مختصات کروی به صورت $\rho = 2a\cos\phi$ است. پس، در مختصات کروی ناحیه‌ی D عبارت است از

$$D^* = \{\, (\rho,\phi,\theta) \;:\; 0 \le \theta \le 2\pi \,,\; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4} \,,\; 0 \le \rho \le 2a\cos\phi \,\}$$
(۸نمره)

در نتیجه

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 3\right) dV = \iiint_{D^*} \left(\frac{1}{\rho^2} - 3\right) \rho^2 \sin\phi \; dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{2a\cos\phi} (1-3\rho^2)d\rho\right] d\phi\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\rho - \rho^3 \Big|_0^{2a\cos\phi}\right)\sin\phi\; d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2a\cos\phi - 8\,a^3\cos^3\phi\right)\sin\phi\; d\phi\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-a\cos^2\phi + 2a^3\cos^4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - (-a+2a^3)\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2}\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2}\right)(2\pi) \;=\; \pi(a - 3a^3)$$

(۷ نمره)

$$\boxed{\iiint_D \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 3\right) dV = \pi a(1 - 3a^2)}$$

پاسخ پرسش ۵.

روش اول) قرار می‌دهیم

$$P(x,y) = 2xf(y) + y^2 g'(x) \quad , \quad Q(x,y) = x^2 f'(y) + 2yg(x)$$

چون f و g توابعی مشتق پذیرند داریم

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xf'(y) + 2yg'(x) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xf'(y) + 2yg'(x)$$

بنابر این میدان F یک میدان گرادیان است و در نتیجه انتگرال $\int_C F\cdot dr$ مستقل از مسیر است.

(۵ نمره)

برای محاسبه‌ی انتگرال می‌توان یکی از دو روش زیر را به کار برد.

الف) تابع دو متغیره U را چنان پیدا می کنیم که $\nabla U(x,y) = F(x,y)$ و انتگرال خطی را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\int_C \left(2xf(y) + y^2 g'(x)\right) dx + \left(x^2 f'(y) + 2yg(x)\right) dy = U(B) - U(A)$$

در این حالت داریم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xf(y) + y^2 g'(x) \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2 f(y) + y^2 g(x) + h(y)$$

که در آن h یک تابع یک متغیره با مشتق پیوسته است. از سوی دیگر

$$x^2 f'(y) + 2yg(x) + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 f'(y) + 2yg(x) \quad \Rightarrow \quad h'(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) \equiv c$$

که در آن c یک عدد ثابت است. پس $U(x,y) = x^2 f(y) + y^2 g(x) + c$ و در نتیجه

$$\int_C F\cdot dr \;= U(B)-U(A) = U(۲,\circ)-U(\circ,\circ) = ۴f(\circ)+\circ+c-(\circ+\circ+c) = ۴f(\circ) = ۴$$

(۱۵ نمره)

تذکر: روش دیگر برای محاسبه‌ی U به صورت زیر می‌باشد

$$U(x,y) = \int_\circ^x P(t,\circ)\ dt + \int_\circ^y Q(x,t)\ dt$$

داریم $P(t,\circ) = ۲tf(\circ) = ۲t$ و $Q(x,t) = x^۲ f'(t) + ۲tg(x)$. بنابر این

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_\circ^x P(t,\circ)\ dt + \int_\circ^y Q(x,t)\ dt \\ &= \int_\circ^x ۲t\ dt + \int_\circ^y [x^۲ f'(t) + ۲tg(x)]\ dt \\ &= [t^۲]_{t=\circ}^{t=x} + [x^۲ f(t) + t^۲ g(x)]_{t=\circ}^{t=y} \\ &= x^۲ + (x^۲ f(y) + x^۲ g(x) - x^۲ f(\circ)) = x^۲ f(y) + y^۲ g(x) + c \end{aligned}$$

ب) چون مقدار انتگرال خطی مستقل از مسیر است به جای مسیر C می توان از مسیر C' ، پاره خط واصل بین نقطه‌ی A و B استفاده نمود. معادلات پارامتری C' را می‌توان برای $\circ \le t \le ۲$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$C' : \begin{cases} x = t \\ y = \circ \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} \int_C F\cdot dr &= \int_\circ^۲ \Big[(۲tf(\circ)+\circ) + (t^۲ f'(\circ)+\circ)(\circ)\Big]\, dt \\ &= f(\circ)\int_\circ^۲ ۲t\ dt = ۴ \end{aligned}$$

(۱۵ نمره)

روش دوم) فرض کنیم C' قسمتی از محور x ها از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A است. با استفاده از قضیه‌ی گرین

$$\int_C P\ dx + Q\ dy + \int_{C'} P\ dx + Q\ dy = \int_{C\cup C'} P\ dx + Q\ dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ dA = \circ$$

زیرا $\frac{\partial P}{\partial y} = ۲yg'(x) + ۲xf'(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = -\int_{C'} P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy$$

با توجه به اینکه مسیر $-C'$ دارای معادلات پارامتری $x = t$ و $y = ۰$ به ازای $۰ \leq t \leq ۲$ است خواهیم داشت

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy = \int_۰^۲ ۲tf(۰)\ dt = ۴$$ (۱۰ نمره)

پاسخ پرسش ۶. فرض کنیم S' قسمتی از صفحه‌ی $z = ۲$ درون S است. از این که مولفه‌های تابع F مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس برای سطح بسته و قطعه قطعه هموار $S \cup S'$ که ناحیه‌ی T را در فضا محصور می‌کند ، داریم

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۰ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۲\ ,\ x^۲ + y^۲ \leq z \leq ۲\} \\ &= \{(r,\theta,z)\ :\ ۰ \leq r \leq \sqrt{۲}\ ,\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\ ,\ r^۲ \leq z \leq ۲\} \end{aligned}$$

$$\text{div}\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۸ + ۲ - ۶ = ۴$$ (۵ نمره)

$$\begin{aligned} \iint_{S\cup S'} F \cdot n\ d\sigma &= \iiint_T \text{div}\ F\ dV = \iiint_T ۴\ dV \\ &= ۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}}\int_{r^۲}^{۲} r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= ۸\pi\int_۰^{\sqrt{۲}} (۲r - r^۳)\ dr \\ &= ۸\pi \end{aligned}$$ (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\iint_S F \cdot n\ d\sigma = ۸\pi - \iint_{S'} F \cdot n\ d\sigma$$

از سوی دیگر برای سطح S' داریم $n = \mathbf{k}$ و S' نمودار تابع $z = f(x, y) = ۲$ است. در نتیجه

$$\iint_{S'} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{S'} -۶z \, d\sigma = -۱۲ \iint_{S'} \, d\sigma = -۱۲\sigma$$

که در آن σ عبارت است از مساحت سطح S' و برابر $\pi(\sqrt{۲})^۲ = ۲\pi$ است. بنابراین

$$\iint_{S} F \cdot n \, d\sigma = ۸\pi + ۲۴\pi = ۳۲\pi$$ (۵ نمره)

پاسخ پرسش ۷. فرض کنیم S قسمتی از صفحه‌ی π باشد که به وسیله‌ی خم ساده و بسته‌ی γ محصور شده است. از این که مولفه‌های تابع $F(x, y, z) = (bz - cy) \, \mathbf{i} + (cx - az) \, \mathbf{j} + (ay - bx) \, \mathbf{k}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای سطح هموار S با مرز γ و برای n ، بردار یکه‌ی نرمال صفحه‌ی π داریم

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = (۲a) \, \mathbf{i} + (۲b) \, \mathbf{j} + (۲c) \, \mathbf{k} = ۲n$$

(۷ نمره)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \iint_{S} \text{curl } F \cdot n \, d\sigma \\ &= \iint_{S} (۲n) \cdot n \, d\sigma \\ &= ۲ \iint_{S} \, d\sigma \end{aligned}$$

بنابر این (۸ نمره)

$$\iint_{S} \, d\sigma = \frac{۱}{۲} \int_{\gamma} F \cdot dr$$

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II فروردین ماه ۱۳۸۷

۱ـ خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t \cos t)\mathbf{k}$ مفروض است.

الف) بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ را در نقطه‌ی $C \ni (۱, ۰, ۱)$ به دست آورید.

ب) مرکز انحنا را در نقطه‌ی $C \ni (۱, ۰, ۱)$ به دست آورید.

ب) معادلات پارامتری خم حاصل از تصویر C را بر صفحه‌ی $x - y + ۲z = ۶$ تحت بردار $V = (-۱, ۱, ۰)$ به دست آورید.

(۱۰ نمره)

۲— تابع $f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\cos(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}) & (x,y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰, ۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰, ۰)$ پیوسته است.

ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰, ۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰, ۰)$ را به دست آورید.

ج) مشتق سویی f در $(۰, ۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.

د) آیا f در $(۰, ۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

(۱۰ نمره)

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ (بخش تشریحی) خرداد ۱۳۸۸ مدت ۱۱۰ دقیقه

۱) فرض کنید $f(x,y)=e^{-(x^{۲}+y^{۲})}$.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار $z=f(x,y)$ را در نقطه‌ی $P=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{e}\right)$ بیابید.(۵ نمره)

(ب) اکسترممهای $f(x,y)$ را روی ناحیه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid(x-۱)^{۲}+y^{۲}\leq ۴\}$ به دست آورید.(۲۰ نمره)

---

۲) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\left[\int_{۰}^{\frac{۱}{\sin\theta+\cos\theta}} r\ dr\right]d\theta.$$ (۵ نمره)

ب) گیریم S قسمتی از سطح نیم کره‌ی $z=\sqrt{۴-x^{۲}-y^{۲}}$ است که زیر صفحه‌ی $z=\sqrt{۳}$ قرار دارد. در این صورت مساحت S را به کمک انتگرال سطح پیدا کنید.(۱۰ نمره)

---

۳) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_C(۲xy+\cos ۲y)dx+(x^{۲}-۲x\sin ۲y+x)dy,$$

که در آن C خط شکسته‌ی حاصل از سه پاره خطی است که به ترتیب از $A=(۱,۰)$ به $B=(۰,۱)$ سپس به $C=(-۱,۰)$ و سرانجام به $D=(۰,-۱)$ پیموده شده است.(۱۰ نمره)

ب) خم C از تلاقی استوانه‌ی به معادله‌ی $x^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $z=۴-x^{۲}-y^{۲}$ به دست آمده و در جهت مثبت طی شده است. برای تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.(۱۰ نمره)

---

۴) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int\int\int_T (x^۲ + y^۲ + z^۲)dV$$

که در آن T ناحیه‌ی درون و روی مخروط به معادله‌ی $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و محدود به نیم‌کره‌هایی به معادلات $z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ و $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ است.(۱۰ نمره)

ب) اگر S سطح خارجی ناحیه‌ی T در بخش الف) باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x, y, z) = x(y^۲ + ۳)\mathbf{i} + y(z^۲ - ۱)\mathbf{j} + z(x^۲ - ۱)\mathbf{k}$.(۱۰ نمره)

موفق باشید

پرسش اول (۲۰ نمره)— خم C با معادلهٔ برداری

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + \sin t - t)\ \mathbf{i} + (\cos t + \sin t + t)\ \mathbf{j} + (۲\cos t - \sin t)\ \mathbf{k}$$

را در نظر بگیرید.

الف) انحنای خم C را در نقطهٔ $P_۰ = (۱, ۱, ۲)$ بیابید.

ب) معادلهٔ صفحهٔ بوسان را در نقطهٔ $P_۰$ به‌دست آورید.

ج) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحهٔ به معادلهٔ $y = x$ مشخص نمایید.

پرسش دوم (۲۰ نمره)— فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۱ & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ \geq ۱ \\ ۱ - x^۲ - y^۲ & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ < ۱ \end{cases}$$

الف) به کمک تعریف $(\varepsilon - \delta)$ ثابت کنید که f در $(۰, ۰)$ پیوسته است.

ب) در مورد وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(۱, ۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۱, ۰)$ (با ذکر دلیل) چه می‌توان گفت؟

ج) نمودار $z = f(x,y)$ را توصیف کنید و یک شکل تقریبی برای آن رسم کنید.

موفق باشید

۱) الف: فرض کنید تابع $f:D\to\mathbb{R}$ بر $D\subseteq\mathbb{R}^2$ و توابع $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ بر $\mathbb{R}^2$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند به قسمی که برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ داشته باشیم $(u,v)\in D$. برای تابع $g(x,y)=f(u,v)$ نشان دهید $\nabla g=f_u\nabla u+f_v\nabla v$.

(۱۳ نمره)

ب: با فرض $f(u,v)=e^{2u+v}$، $u=\sin(x+y)$ و $v=\cos(x-y)$ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که بردار $\mathbf{w}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار یکه باشد و داشته باشیم $D_{\mathbf{w}}\,g(0,0)=0$.

(۱۲ نمره)

۲) الف: با استفاده از تعریف مشتق‌پذیری ثابت کنید که تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ در $(1,-1)$ مشتق‌پذیر است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است تعیین اکسترممهای مطلق تابع f بر ناحیهٔ بسته و کراندار $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x-3\leq 0\}$.

(۱۳ نمره)

۳) الف: انتگرال $\iint_D 4y(x-y^2)\sin(x^2-y^4)dA$ را حساب کنید که در آن D ناحیهٔ بین سهمی‌های $x-y^2=0,\ x-y^2=1,\ x+y^2=2,\ x+y^2=3$ واقع در ربع اول صفحه است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iiint_T \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-2z\right)\,dV$ که در آن T ناحیهٔ مشترک درون کرهٔ $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ و خارج کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ است.

(۱۳ نمره)

بقیه‌ی پرسش‌ها را در پشت برگه مشاهده نمایید.

۴) الف: هرگاه D ناحیهٔ محصور به خم ساده و بستهٔ γ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است، نشان دهید A_D مساحت ناحیهٔ D عبارت است از $A_D = \frac{۱}{۲}\int_\gamma -ydx + xdy$.
(۱۰ نمره)

ب: برای میدان برداری $F(x,y) = \Big(-y + e^{-\sin(x^۲)}\Big)\mathbf{i} + \Big(x + \cosh(y^۲ - y^۳ + ۱)\Big)\mathbf{j}$ و خم γ به معادلهٔ $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ که در جهت مثبت پیموده شده است مطلوب است $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.
(۱۵ نمره)

---

۵) فرض کنید $F(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (y + ۲z)\mathbf{j} + (۲z + ۳x)\mathbf{k}$ و S سطح کل کرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ باشد. همچنین فرض کنید γ خم ساده و بستهٔ حاصل از تلاقی کره و صفحهٔ $z = ۱$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال رو به خارج کره باشد.

الف: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.
(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, \mathbf{d}\sigma$.

به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان   دانشکده‌ی علوم ریاضی

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II   فروردین ۱۳۹۰

پرسش اول (۱۲ نمره) خم C را با معادله‌ی برداری زیر در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}(t) = (e^t - t)\ \mathbf{i} + (e^t + t)\ \mathbf{j} + \Big(1 + 2(e^{2t} + t^2)\Big)\ \mathbf{k}$$

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان را در نقطه‌ی $P_0 = (1, 1, 3)$ به‌دست آورید.

ب) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحه‌ی به معادله‌ی $y - z = 2$ مشخص کنید.

ج) نشان دهید که خم C بر یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد.

حل.

الف) (بارم ۵ نمره)

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t - 1)\ \mathbf{i} + (e^t + 1)\ \mathbf{j} + 4\Big(e^{2t} + t\Big)\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = e^t\ \mathbf{i} + e^t\ \mathbf{j} + 4\Big(2e^{2t} + 1\Big)\ \mathbf{k}$$

با توجه به $P_0 = \mathbf{r}(0)$، بردار نرمال صفحه‌ی بوسان در P_0 را می‌توان بردار زیر در نظر گرفت.

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (2\ \mathbf{j} + 4\ \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} +\ \mathbf{j} + 12\ \mathbf{k}) = 20\mathbf{i} + 4\ \mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در P_0 عبارت است از $20(x - 1) + 4(y - 1) - 2(z - 3) = 0$ یا به طور معادل $10x + 2y - z = 9$.

ب) (بارم ۵ نمره) **روش اول:** اگر L_P خط گذرنده از $P = (e^t - t, e^t + t, 1 + 2(e^{2t} + t^2)) \in C$ با بردار هادی $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (بردار نرمال صفحه‌ی $y - z = 2$) باشد. معادله‌ی L_P به شکل زیر است:

$$L_P : \begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t \\ z = -\lambda + 1 + 2(e^{2t} + t^2) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

بنابر این نقطه‌ی دلخواه روی C'، تصویر خم C بر صفحه‌ی $\pi:\ y - z = 2$ محل تلاقی خط L_P با صفحه‌ی π است. پس مختصات این نقطه جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t \\ z = -\lambda + 1 + 2(e^{2t} + t^2) \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

از معادله‌ی چهارم یعنی $y - z = ۲$ نتیجه می‌شود $\lambda + e^t + t + \lambda - ۱ - ۲(e^{۲t} + t^۲) = ۲$. پس $\lambda = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) - e^t - t)$. به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

روش دوم: نقطه‌ی دلخواهی مانند $Q = (۰, ۲, ۰)$ را در صفحه‌ی π در نظر می‌گیریم. فرض کنیم نقطه‌ی P' تصویر قائم نقطه‌ی $P \in C$ بر صفحه‌ی π و $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ بردار نرمال π باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{PQ} = (t - e^t)\ \mathbf{i} + (۲ - t - e^t)\ \mathbf{j} + (-۱ - ۲(e^{۲t} + t^۲))\ \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^۲} = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

ج) (بارم ۲ نمره) برای $P = (x, y, z) \in C$ داریم:

$$x = x(t) = e^t - t, \quad y = y(t) = e^t + t, \quad z = z(t) = ۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲)$$

با توجه به این که $z = ۱ + x^۲ + y^۲$، نتیجه می‌گیریم C بر یک رویه‌ی درجه دو (سهمی‌گون دوار) قرار دارد.

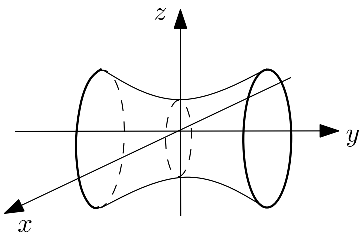
پرسش دوم (۱۰ نمره) رویه‌ی S به معادله‌ی $x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱$ مفروض است.

الف) این رویه را توصیف و نمودار آن را رسم کنید.

ب) نشان دهید دقیقاً دو خط راست از نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ می گذرند که تماماً بر رویه‌ی فوق قرار دارند.

ج) معادلات پارامتری خم حاصل از تلاقی S را با صفحه‌ی $x = ۲y$ به دست آورید.

حل. الف)(بارم ۳ نمره) مقطع S با صفحات $y = k$ برای هر k یک دایره و با صفحات $x = k$ و $z = k$ هذلولی است. سطح S یک هذلولی‌گون یک‌پارچه‌ی دوار در امتداد محور y است.



ب) (بارم ۴ نمره) فرض کنیم $L_۰ \subseteq S$ خط با بردار هادی $\mathbf{v} = a\ \mathbf{i} + b\ \mathbf{j} + c\ \mathbf{k}$ و گذرنده از $P_۰ = (۱, ۱, ۱)$ باشد. معادله‌ی $L_۰$ به شکل زیر است:

$$L_۰ : \begin{cases} x = at + ۱ \\ y = bt + ۱ \\ z = ct + ۱ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} L_۰ \subseteq S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \ (at+۱)^۲ - (bt+۱)^۲ + (ct+۱)^۲ = ۱ \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \ (a^۲ - b^۲ + c^۲)t^۲ + ۲(a - b + c)t = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^۲ - b^۲ + c^۲ = ۰ \\ ۲(a - b + c) = ۰ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^۲ + c^۲ = b^۲ \\ a + c = b \end{cases} \end{aligned}$$

از معادله‌ی دوم داریم $a^۲ + c^۲ + ۲ac = b^۲$ و در نتیجه بنابر معادله‌ی اول $ac = ۰$. پس این دستگاه دو جواب $a = ۰, b = c$ و $c = ۰, a = b$ دارد. به این ترتیب $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ بردارهای هادی دو خط مورد نظر هستند.

ج)(بارم۳ نمره) مختصات نقطه‌ی تلاقی S با صفحه‌ی $\pi\ :\ x=۲y$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱ \\ x = ۲y \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود $۳y^۲ + z^۲ = ۱$. معادله‌ی پارامتری خم حاصل به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x = \dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ y = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ z = \sin t \end{cases}$$

پرسش سوم (۸ نمره) تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}\sin x}{x^{۲}+|y|} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در $(۰,۰)$ محاسبه کنید.

حل. الف) (بارم ۴ نمره) باید نشان دهیم:

$$\forall\,\varepsilon>۰\ \exists\,\delta>۰\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\,(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}<\delta\Rightarrow|\frac{x^{۲}\sin x}{x^{۲}+|y|}-۰|<\varepsilon)$$

با توجه به نامساوی‌های $۱\leq\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+|y|}$ و $|\sin x|\leq|x|$ داریم:

$$|\frac{x^{۲}\sin x}{x^{۲}+|y|}|\leq|x|\frac{x^{۲}}{x^{۲}+|y|}\leq|x|\leq\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$$

پس برای $\varepsilon>۰$ کافی است قرار دهیم $\delta\leq\varepsilon$.

ب) (بارم هرقسمت ۲ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\frac{h^{۲}\sin h}{h^{۲}+۰}}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\sin h}{h}=۱$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{۰-۰}{h}=۰$$

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲ فروردین‌ماه ۱۳۹۱ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی .... شماره دانشجویی .... مدرس..............

---

۱) خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t)\mathbf{i} + (2e^t \sin t)\mathbf{j} - e^{2t}\mathbf{k}$ مفروض است.

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم C را در نقطه‌ی $P_0 = (2, 0, -1)$ بیابید. (۱۰ نمره)

ب) خمیدگی (انحنای) خم C را در نقطه‌ی $P_0 = (2, 0, -1)$ محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ج) نشان دهید خم C بر یک رویه‌ی درجه‌ی دوم قرار دارد. معادله‌ی این رویه را به‌دست آورید، اسم رویه را بیان کنید و نمودار آن را رسم کنید. (۱۰ نمره)

---

۲) تابع حقیقی $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{x^2 + y^2} & (x,y) = (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الف) پیوستگی f را در $(0,0)$ بررسی کنید. (۱۰ نمره)

ب) مقادیر $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ج) مشتق پذیری f را در $(0,0)$ بررسی کنید.(۱۰ نمره)

موفق باشید

دانشکده علوم ریاضی — دانشگاه صنعتی اصفهان

فروردین ۹۲ | امتحان میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

لطفا توجه کنید

۱— نام، شماره دانشجویی و نام مدرس خود را در بالای تمام صفحات پاسخ‌نامه بنویسید.
۲— از جدا کردن صفحات پاسخ‌نامه جدا خودداری کنید.
۳— در طول امتحان به هیچ سئوالی پاسخ داده نمی‌شود.
۳— استفاده از موبایل در طول مدت امتحان ممنوع است. لطفاً دستگاه‌های خود را در این مدت خاموش نگه دارید.

۱— تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^۲-y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.
ب) مطلوبست تعیین مشتق سویی تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.
ج) نشان دهید که f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.
د) مطلوبست تعیین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$.
(۲۰ نمره)

۲— فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. اگر $g:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y)=f(x+y,x^۲-y)$ داده شده باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم f.
(۸ نمره)

۳— تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=xye^{-(x+y)}$ مفروض است. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی f را در صورت وجود مشخص کنید.
(۱۲ نمره)

موفق باشید

پاسخ مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲– فروردین ۹۲

۱– تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^۲-y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) مطلوبست تعیین مشتق سویی تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

ج) نشان دهید که f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

د) مطلوبست تعیین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$.

حل.

الف) باید نشان دهیم که برای $\epsilon>۰$ عدد $\delta>۰$ وجود دارد که

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^۲,\quad \sqrt{x^۲+y^۲}<\delta \ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه

$$|f(x,y)-f(۰,۰)|=\frac{|xy^۲-y^۳|}{x^۲+y^۲}\leq \frac{y^۲}{x^۲+y^۲}|x|+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}|y|\leq |x|+|y|\leq ۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$

برای داشتن $|f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$، کافی است $۲\sqrt{x^۲+y^۲}<\epsilon$. برای این منظور $\delta>۰$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{\epsilon}{۲}$ انتخاب می‌کنیم. (۵ نمره)

ب) با توجه به تعریف مشتق سویی

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{t\to ۰}\frac{f(ta,tb)-f(۰,۰)}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\frac{t^۳ab^۲-t^۳b^۳}{t^۲a^۲+t^۲b^۲}-۰}{t}=\frac{ab^۲-b^۳}{a^۲+b^۲}=ab^۲-b^۳$$

(۵ نمره)

ج) اگر f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$. عبارت $D_uf(۰,۰)$ را در قسمت قبل حساب کردیم. اکنون به محاسبه‌ی $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ می‌پردازیم. بنابر قسمت قبل، با انتخاب $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=D_if(۰,۰)=۰\qquad,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=D_jf(۰,۰)=-۱$$

در نتیجه $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}=-b$. با توجه به اینکه تساوی $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ لزوما برقرار نیست (به طور مثال، برای $\mathbf{u}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{j}$، داریم $D_uf(۰,۰)=۰\neq-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$) پس f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

(راه حل دوم: استفاده از تعریف مشتق‌پذیری) (۵ نمره)

د) با معرفی تابع سه متغیره‌ی g با ضابطه‌ی $g(x,y,z)=f(x,y)-z$، رویه‌ی S رویه‌ی تراز تابع g به ازای ثابت صفر بوده، بردار $\nabla g(۱,۰,۰)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر این رویه در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ خواهد بود. با توجه به اینکه

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^۴-x^۲y^۲+۲xy^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۲xy^۳-۳x^۲y^۲-y^۴}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}=-۱$$

داریم $\nabla g(۱,۰,۰)=-\mathbf{k}$. به این ترتیب، صفحه‌ی مماس بر S در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ دارای معادله‌ی $-z=۰$ یا $z=۰$ بوده، که همان صفحه‌ی xoy است. (۵ نمره)

۲ــ فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. اگر $g:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y)=f(x+y,x^۲-y)$ داده شده باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم f.

حل. با قرار دادن $u(x,y)=x+y$ و $v(x,y)=x^۲-y$، خواهیم داشت $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. با توجه به شرایط داده شده می‌توانیم از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+۲x\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$$

(۳ نمره)

به این ترتیب، با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\\&=(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y})+۲x(\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial y})\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}-\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}+۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}+(۲x-۱)\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\end{aligned}$$

(۵ نمره)

۳— تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=xye^{-(x+y)}$ مفروض است. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی f را در صورت وجود مشخص کنید.

حل. ابتدا نقاط بحرانی f را بر $\mathbb{R}^۲$ به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه f تابعی مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی این تابع جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x}=۰$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=۰$ خواهند بود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{-(x+y)}-xye^{(x+y)}=y(۱-x)e^{-(x+y)}=۰ \qquad (۱)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{-(x+y)}-xye^{(x+y)}=x(۱-y)e^{-(x+y)}=۰ \qquad (۲)\end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌ی (۱)، داریم $y=۰$ یا $x=۱$. در حالت $y=۰$ با استفاده از معادله‌ی (۲) خواهیم داشت $x=۰$. به همین ترتیب، اگر $x=۱$ آنگاه با استفاده از (۲)، $y=۱$. پس f بر $\mathbb{R}^۲$ دارای دو نقطه‌ی بحرانی $P_۱=(۰,۰)$ و $P_۲=(۱,۱)$ است. (۴ نمره)

اکنون برای ادامه‌ی مسئله از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} &= -ye^{-(x+y)}-y(۱-x)e^{-(x+y)}\\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y} &= (۱-x)e^{-(x+y)}-y(۱-x)e^{-(x+y)}\\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} &= -xe^{-(x+y)}-x(۱-y)e^{-(x+y)}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$A_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰,۰)=۰\quad,\quad B_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=۱\quad,\quad C_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۰,۰)=۰$$

$$D_۱=A_۱C_۱-B_۱^۲=-۱<۰$$

پس $P_۱$ یک نقطه‌ی زینی برای f است. به همین ترتیب،

$$A_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۱,۱)=-e^{-۲}\quad,\quad B_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۱,۱)=۰\quad,\quad C_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۱,۱)=-e^{-۲}$$

$$D_۲=A_۲C_۲-B_۲^۲=e^{-۴}>۰$$

با توجه به اینکه $A_۲<۰$، نقطه‌ی $P_۲$ نظیر ماکزیمم نسبی تابع f است. (۸ نمره)

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۲

مدت آزمون: ۲ ساعت

۱۳۹۳/۱/۲۱

توجه: برگه های دفترچه‌ی پاسخ نامه را بترتیب شماره‌گذاری کرده و پاسخ هر پرسش را در برگهٔ مخصوص خود بنویسید. بارم پرسش‌های ۱ و ۴ هر کدام ۸ و پرسش‌های ۲ و۳ هر کدام ۱۲ نمره است.

---

۱. فرض کنید رویه‌ی S در فضا توسط معادله‌ی $(x-z)+\sin(y-z)=1$ مشخص شده باشد. نشان دهید که کلیه‌ی صفحات مماس بر S بر صفحه به معادله‌ی $x+y+z=0$ عمود هستند.

۲. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
مفروض است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ب) با استفاده از تعریف نشان دهید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

۳. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\ \sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
مفروض است.

الف) نشان دهید f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته است.

ب) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$، مطلوب است محاسبه‌ی مشتق سویی f در $(0,0)$ در سوی $\mathbf{u}$، یعنی $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$.

ج) مقدار $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ را به دست آورید. از دو قسمت (ب) و (ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر و z تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y باشد که بطور ضمنی در معادله‌ی $f(e^{(x+z)},y+z)=0$ صدق می‌کند. ثابت کنید
$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-1$$
.

«موفق باشید»

پاسخ پرسش ۱ ریاضی عمومی ۲ فروردین ماه ۱۳۹۳

سوال ۱:

$$F(x,y,z) = x - z + \sin(y-z) - 13 \quad 1$$

$$F_x = 1, \quad F_y = \cos(y-z), \quad F_z = -1 - \cos(y-z) \quad 3$$

$$\nabla F = i + \cos(y-z)\,j - (1+\cos(y-z))\,k \quad 1, \qquad N = i + j + k \quad 1$$

$$\nabla F \cdot N = 1 + \cos(y-z) - 1 - \cos(y-z) = 0 \quad 2$$

پاسخ پرسش 2 ریاضی عمومی ۲ فروردین ماه ۱۳۹۳

سوال 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \quad 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{y} = 0 \quad 2$$

$$\Delta f = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\Delta x^4 + 2\Delta y^4}{\Delta x^2+\Delta y^2} & \text{if } (\Delta x,\Delta y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (\Delta x,\Delta y) = (0,0) \end{cases} \quad 1$$

با فرض $\alpha(\Delta x,\Delta y) = \dfrac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ (2) و $\beta(\Delta x,\Delta y) = \dfrac{2\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ (2) داریم

$$\Delta f = 0\Delta x + 0\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y \quad 1$$

و

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x,\Delta y) = 0 \quad 2$$

پس f در $(0,0)$ مشتق پذیر است.

پاسخ پرسش ۳ ریاضی عمومی ۲ فروردین ۱۶ ۱۳۹۳

۳. الف) (طبق تعریف)

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy\sin x}{x^2+y^2}-0\right| \le \frac{|x|\,|y|\,|\sin x|}{x^2+y^2} \le \frac{(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2} \overset{?}{<} \varepsilon$$

کافی است $\delta \le \varepsilon$ اختیار شود. (۴ نمره)

ب)

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{abt^2\sin(at)}{(a^2+b^2)t^2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0} ab\,\frac{\sin(at)}{t} = a^2b$$

(۴ نمره)

ج)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0)\cdot \vec{u} = 0$$

نتیجه اینکه برای هر بردار یکه $\vec{u}=(a,b)$، $D_u f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot u$ برقرار نیست. پس f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (۴ نمره)

پاسخ پرسش ۴ ریاضی عمومی ۲ فروردین ۱۶ ۱۳۹۳

۴. با فرض تابع مشتق‌پذیر $z=z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y)

$$f(e^{x+z(x,y)},\ y+z(x,y)) = 0$$

قرار می‌دهیم $u(x,y) := e^{x+z(x,y)}$ و $v(x,y) = y+z(x,y)$ که برای هر (x,y)

$$f(u(x,y), v(x,y)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(x,y),v(x,y))\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(f(u(x,y),v(x,y))\right)=0$$

$$\Rightarrow f_u\frac{\partial u}{\partial x} + f_v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad f_u\frac{\partial u}{\partial y} + f_v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow f_u\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)e^{x+z(x,y)} + f_v\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u(x,y)f_u}{uf_u+f_v}$$

ادامه پرسش ۴ ریاضی عمومی ۲ فروردین ماه ۱۳۹۴

و

$$\frac{\partial z}{\partial y} e^{(x+z(x,y))} f_u + \left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) f_v = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_v}{uf_u + f_v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-uf_u}{uf_u+f_v} + \frac{-f_v}{uf_u+f_v} = -1$$

(۸ نمره)

باسمه تعالی

پاسخ سوالات امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲

نیمسال اول ۹۵-۹۴

۱. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

الف) نشان دهید f در مبداء پیوسته است. (۳ نمره)

ب) مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را بیابید. (۳ نمره)

ج) اگر $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار یکانی باشد (یعنی $a^2+b^2=1$)، مطلوبست محاسبه مقدار $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ (مشتق سویی از f در نقطه $(0,0)$ و در سوی $\mathbf{u}$) و مقدار $\nabla f(0,0).\mathbf{u}$. (۳ نمره)

د) ثابت کنید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست (می‌توانید از قسمت (ج) استفاده کنید). (۳ نمره)

پاسخ الف. راه اول. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &\leq \left|\frac{(x+y)\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x+y||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |x+y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\\ &\leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

با قرار دادن $\delta=\epsilon/2$، داریم

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x,y)-f(0,0)|\leq 2\delta=\epsilon.$$

بنابراین f در مبدا پیوسته است.

راه دوم. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$\left|\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

با توجه به اینکه $\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ کران‌دار است و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$، بنابراین طبق قضیه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. پس f در مبدا پیوسته است.

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\sin(h^2)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin h^2}{h^2}=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\sin(-h^2)}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin h^2}{h^2}=-1.$$

پاسخ ج. طبق قسمت ب داریم $\nabla f(۰,۰)=(۱,-۱)$. بنابراین $\nabla f(۰,۰).\mathbf{u}=a-b$. از طرفی

$$D_{\mathbf{u}}f(۰,۰)=\lim_{t\to۰}=\frac{f(at,bt)-f(۰,۰)}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{(a+b)t\sin((a^۲-b^۲)t^۲)}{(a^۲+b^۲)t^۲}-۰}{t}$$
$$=\lim_{t\to۰}\frac{(a+b)\sin((a^۲-b^۲)t^۲)}{t^۲}=(a+b)(a^۲-b^۲).$$

پاسخ د. اگر f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه برای هر بردار یکانی $\mathbf{u}$ $D_{\mathbf{u}}f(۰,۰)=\nabla f(۰,۰).\mathbf{u}$. اما به ازای بردار $\mathbf{u}=(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})$ داریم

$$D_{\mathbf{u}}f(۰,۰)=-\frac{۴۹}{۱۲۵},\quad \nabla f(۰,۰).\mathbf{u}=-\frac{۱}{۵}.$$

پس f در مبدا مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید رویه $S_۱$ به معادله $z=۲x^۲-۴x-۳y^۲+۶$ و رویه $S_۲$ به معادله $e^{x^۲y}-z-(y-۱)z^۲=e-۱$ داده شده است.

الف) رویه $S_۱$ را توصیف نمایید و نوع آن را تعیین کنید. (۲ نمره)

ب) ثابت کنید که از نقطه $(۱,۱,۱)$ واقع بر رویه $S_۱$ دو خط راست متقاطع می‌گذرند که تماماً بر رویه $S_۱$ قرار دارند. معادلات این دو خط را بنویسید. (۵ نمره)

ج) معادله خط مماس در نقطه $(۱,۱,۱)$ بر خم C که از تلاقی دو رویه $S_۱$ و $S_۲$ حاصل می‌شود را بنویسید. (۶ نمره)

پاسخ الف. ابتدا رویه $S_۱$ بصورت استاندارد می‌نویسیم:

$$z=۲(x-۱)^۲-۳y^۲+۴.$$

تلاقی رویه با صفحه $z=c$ هذلولی $(x-۱)^۲-۳y^۲=c-۴$ است. تلاقی رویه با صفحه $x=c$، سهمی $z=-۳y^۲+۲(c-۱)^۲+۴$ با سر رو به پایین است و تلاقی رویه با صفحه $y=c$، سهمی $z=۲(x-۱)^۲-۳c^۲+۴$ با سر رو به بالا است. بنابراین نوع رویه سهمی‌گون هذلولوی (یا زین اسبی) است.

پاسخ ب. معادله خط راست با بردار هادی (a,b,c) که از نقطه $(۱,۱,۱)$ می‌گذرد به صورت زیر است.

$$x(t)=at+۱,\quad y(t)=bt+۱,\quad z(t)=ct+۱.$$

برای اینکه خط تماماً روی رویه $S_۱$ قرار گیرد، باید نقطه $(x(t),y(t),z(t))$ به ازای هر t در رویه صدق کند. پس

$$\forall t,\quad ct+۱=۲(at+۱)^۲-۴(at+۱)-۳(bt+۱)^۲+۶.$$

با ساده کردن داریم

$$\forall t,\quad (۲a^۲-۳b^۲)t^۲-(۶b+c)t=۰.$$

بنابراین ضریب $t^۲$ و ضریب t برابر صفر است.

$$۶b+c=۰,۲a^۲-۳b^۲=۰.$$

یعنی

$$c = -۶b, a = \pm\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}b.$$

پس بردار هادی خط بصورت $(a,b,c) = (\frac{\sqrt{۶}}{۲}, ۱, -۶)$ یا $(a,b,c) = (-\frac{\sqrt{۶}}{۲}, ۱, -۶)$ است که دو خط زیر را بدست می‌دهد.

$$l_۱: \quad x(t) = \frac{\sqrt{۶}}{۲}t + ۱, \quad y(t) = t + ۱, \quad z(t) = -۶t + ۱.$$

$$l_۲: \quad x(t) = -\frac{\sqrt{۶}}{۲}t + ۱, \quad y(t) = t + ۱, \quad z(t) = -۶t + ۱.$$

پاسخ ج. بردار نرمال صفحات مماس بر رویه‌ها در نقطه $(۱,۱,۱)$ بر خم C عمودند. بنابراین بردار هادی خط مماس بر خم C در این نقطه در راستای $n_۱ \times n_۲$ است که n_i بردار نرمال صفحه مماس بر رویه S_i در نقطه $(۱,۱,۱)$ است. اما رویه $S_۱$ دارای معادله $f(x,y,z) = ۲x^۲ - ۴x - ۳y^۲ + ۶ - z = ۰$ و رویه $S_۲$ دارای معادله $g(x,y,z) = e^{x^۲y} - z - (y-۱)z^۲ - e + ۱ = ۰$ است. پس

$$\nabla f = (۴x - ۴, -۶y, -۱), \quad \nabla g = (۲xye^{x^۲y}, x^۲e^{x^۲y} - z^۲, -۱ - ۲(y-۱)z).$$

$$n_۱ = \nabla f(۱,۱,۱) = (۰, -۶, -۱), \quad n_۲ = \nabla g(۱,۱,۱) = (۲e, e-۱, -۱).$$

لذا بردار هادی خط مماس از رابطه زیر بدست می‌آید

$$n_۱ \times n_۲ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰ & -۶ & -۱ \\ ۲e & e-۱ & -۱ \end{vmatrix} = (۶ - e + ۱)\mathbf{i} - ۲e\mathbf{j} + ۱۲e\mathbf{k}.$$

چون خط مماس از نقطه $(۱,۱,۱)$ می‌گذرد، معادله خط مماس بصورت زیر است.

$$x(t) = (۷ - e)t + ۱, \quad y(t) = -۲et + ۱, \quad z(t) = ۱۲et + ۱.$$

---

۳. فرض کنید g تابعی سه متغیره و مشتق‌پذیر باشد و z تابعی برحسب x و y باشد که در رابطه ضمنی $g(zx^۲ + e^{xy}, x^۲y + \ln z, ۲x + z^۲) = ۰$ صدق می‌کند و داریم $z(۰,۰) = ۱$.

الف) مطلوبست تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ برحسب مشتقات جزیی g. (۴ نمره)

ب) اگر $\nabla g(۱,۰,۱) = ۴\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}(۰,۰)$. (۱ نمره)

پاسخ الف. **راه اول.** قرار می‌دهیم $u(x,y) = zx^۲ + e^{xy}$، $v(x,y) = x^۲y + \ln z$ و $w(x,y) = ۲x + z^۲$. همچنین قرار می‌دهیم $f(x,y) = g(u,v,w) = ۰$. با مشتق‌گیری برحسب x و استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x}x^۲ + ۲xz + ye^{xy}) + \frac{\partial g}{\partial v}(۲xy + \frac{۱}{z}\frac{\partial z}{\partial x}) + \frac{\partial g}{\partial w}(۲ + ۲\frac{\partial z}{\partial x}z) = ۰. \end{aligned}$$

با حل برحسب $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(-۲xz - ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u} - ۲xy\frac{\partial g}{\partial v} - ۲\frac{\partial g}{\partial w}}{x^۲\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{۱}{z}\frac{\partial g}{\partial v} + ۲z\frac{\partial g}{\partial w}}. \qquad (۱)$$

راه دوم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = zx^۲ + e^{xy}$، $v(x,y) = x^۲y + \ln z$ و $w(x,y) = ۲x + z^۲$. هم‌چنین قرار می‌دهیم $F(x,y,z) = g(u,v,w)$. با توجه به فرمول مشتق ضمنی و قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{(-۲xz - ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u} - ۲xy\frac{\partial g}{\partial v} - ۲\frac{\partial g}{\partial w}}{x^۲\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{۱}{z}\frac{\partial g}{\partial v} + ۲z\frac{\partial g}{\partial w}}.$$

پاسخ ب. با قرار دادن $x = ۰, y = ۰, z = ۱$ و $\dfrac{\partial g}{\partial u} = ۴$، $\dfrac{\partial g}{\partial v} = ۳$ و $\dfrac{\partial g}{\partial w} = -۱$ در رابطه (۱) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}(۰,۰) = \frac{۰ + ۰ + ۲}{۰ + ۳ - ۲} = ۲.$$

موفق باشید

پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۵-۹۴

---

۱. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^2+y^2+|x|\,|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را بیابید.

ج) وجود مشتق سویی f در مبدا مختصات و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ را بررسی کنید.

د) با محاسبه‌ی $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$، مشتق‌پذیری f در $(0,0)$ را با ذکر دلیل بررسی کنید. (۳۰ نمره)

حل. الف) نشان می‌دهیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم برای $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد که

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta \;\Rightarrow\; |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه برای هر $(x,y)\neq(0,0)$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^2+y^2+|x||y|}\right| &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2+|x||y|}|\sin y|+\frac{y^2}{x^2+y^2+|x||y|}|\sin x|\\ &\leq |\sin y|+|\sin x|\leq |y|+|x|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

کافی است برای $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ را با شرط $\delta\leq\frac{\epsilon}{2}$ اختیار کنیم. در این صورت صحت استلزام فوق به راحتی تحقیق می‌گردد.

پس f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) با استفاده از تعریف مشتقات جزئی،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=0\end{aligned}$$

ج) مشتق سویی f در مبدا و در سوی برای یکه‌ی $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{j}$، بنابه تعریف، عبارت است از

$$\begin{aligned} D_u f(۰,۰) &= \lim_{t \to ۰} \frac{f(۰ + t\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰ + t\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - f(۰,۰)}{t} \\ &= \lim_{t \to ۰} \frac{\dfrac{\frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲}) + \frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\frac{t^۲}{۲} + \frac{t^۲}{۲} + |t\frac{\sqrt{۲}}{۲}||t\frac{\sqrt{۲}}{۲}|}}{t} \\ &= \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{۲}{۳}\sin(\frac{\sqrt{۲}}{۲}t)}{t} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \end{aligned}$$

د) با توجه به محاسبات قسمت (ب)، $\nabla f(۰,۰) = ۰\mathbf{i} + ۰\mathbf{j}$ و در نتیجه $\nabla f(۰,۰) \cdot \mathbf{u} = ۰$. با توجه به قسمت (ج)،

$$D_u f(۰,۰) \neq \nabla f(۰,۰) \cdot \mathbf{u}$$

در نتیجه، تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $f(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{y}) = ۱$ تعریف شود، نشان دهید z در معادله‌ی دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند. (۱۵ نمره)

حل. (راه حل اول) قرار می‌دهیم $u(x,y,z) = \frac{z}{x}$، $v(x,y,z) = \frac{z}{y}$ و $w(x,y,z) = \frac{x}{y}$ و

$$g(x,y,z) = f\big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\big)$$

در این صورت، بنابه فرض مسئله، z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $g(x,y,z) = ۱$ داده شده است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial x} + f_v\frac{\partial v}{\partial x} + f_w\frac{\partial w}{\partial x}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z} + f_v\frac{\partial v}{\partial z} + f_w\frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{-f_u\frac{z}{x^۲} + f_w\frac{۱}{y}}{f_u\frac{۱}{x} + f_v\frac{۱}{y}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial y} + f_v\frac{\partial v}{\partial y} + f_w\frac{\partial w}{\partial y}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z} + f_v\frac{\partial v}{\partial z} + f_w\frac{\partial w}{\partial z}} = -\frac{-f_v\frac{z}{y^۲} - f_w\frac{x}{y^۲}}{f_u\frac{۱}{x} + f_v\frac{۱}{y}} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= x\Big(-\frac{-f_u\frac{z}{x^{2}}+f_w\frac{1}{y}}{f_u\frac{1}{x}+f_v\frac{1}{y}}\Big)+y\Big(-\frac{-f_v\frac{z}{y^{2}}-f_w\frac{x}{y^{2}}}{f_u\frac{1}{x}+f_v\frac{1}{y}}\Big)\\
&= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{1}{x}+f_v\frac{1}{y}}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{1}{x}+f_v\frac{1}{y}}\\
&= z\Big(\frac{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}\Big)=z
\end{aligned}$$

(راه حل دوم) بنابر فرض، تابعی مشتق‌پذیر چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y) در معادله‌ی $f\big(\frac{z(x,y)}{x},\frac{z(x,y)}{y},\frac{x}{y}\big)=1$ صدق می‌کند. با قرار دادن $u(x,y)=\frac{z(x,y)}{x}$، $v(x,y)=\frac{z(x,y)}{y}$ و $w(x,y)=\frac{x}{y}$، برای هر (x,y) داریم

$$f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=1$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial y}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=0$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}
0 &= f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}+f_w\frac{\partial w}{\partial x}=f_u\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^{2}}\Big)+f_v\Big(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+f_w\Big(\frac{1}{y}\Big)\\
0 &= f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}+f_w\frac{\partial w}{\partial y}=f_u\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+f_v\Big(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^{2}}\Big)-f_w\Big(\frac{x}{y^{2}}\Big)
\end{aligned}$$

با حل دو معادله‌ی فوق بر حسب $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{z}{x^{2}}f_u-\frac{1}{y}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{y^{2}}f_v+\frac{x}{y^{2}}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v} \\ &= \frac{\frac{z}{x}f_u+\frac{z}{y}f_v}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}=z \end{aligned}$$

---

۳. رویه‌ی S به معادله‌ی $z=e^{(x^۲+y^۲)}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید S یک رویه‌ی دوار است.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $P_۰=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},e)$ را بنویسید.

ج) معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ی $P_۰$ بر خم C حاصل تلاقی رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ مماس است. (۲۵ نمره)

حل. الف) (راه حل اول) فرض کنیم $C_۰$ خم حاصل از برخورد رویه‌ی S با صفحه‌ی yoz باشد. در این صورت $C_۰$ خمی به معادله‌ی $z=e^{y^۲}$ یا به معادله‌ی $f(y,z)=e^{y^۲}-z=۰$ می‌باشد. رویه‌ی حاصل از دوران این خم حول محور z، رویه‌ای به معادله‌ی

$$f(\pm\sqrt{x^۲+y^۲},z)=e^{(x^۲+y^۲)}-z=۰$$

خواهد بود که همان رویه‌ی داده شده در صورت سئوال است. پس رویه‌ی مورد نظر حاصل دوران خم فوق حول محور z است.

(راه حل دوم) صفحه‌ی $z=k$ (به شرط $k>۱$) رویه‌ی فوق را در دایره‌ی $x^۲+y^۲=\ln k$ قطع می‌کند. با توجه به اینکه با تغییر $k>۱$ مراکز دایره‌های حاصل همه بر محور z قرار دارند، پس رویه‌ی فوق رویه‌ای دوار حول محور z است.

ب) اگر قرار دهیم $g(x,y,z):=e^{(x^۲+y^۲)}-z$ آنگاه رویه‌ی S دارای معادله‌ی $g(x,y,z)=۰$ است و از آنجا بردار ∇g در هر نقطه از این رویه بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در آن نقطه خواهد بود. داریم

$$\nabla g=(۲xe^{(x^۲+y^۲)})\mathbf{i}+(۲ye^{(x^۲+y^۲)})\mathbf{j}+(-۱)\mathbf{k}$$

در نتیجه در نقطه‌ی $P_۰=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},e)$ ،

$$\nabla g(P_۰)=\sqrt{۲}e\mathbf{i}+\sqrt{۲}e\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

و در نتیجه معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر S در P_0 عبارت است از $\sqrt{2}e(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}e(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-(z-e)=0$

ج) (راه حل اول) خط مماس بر خم C در نقطه‌ی P_0، در صفحه مماس بر رویه در این نقطه (صفحه به دست آمده در قسمت قبل) قرار دارد. از طرف دیگر، این خط در داخل صفحه‌ی $z=e$ نیز قرار گرفته است. بنابر این حاصل‌ضرب برداری نرمال‌های دو صفحه‌ی فوق را می‌توانیم به عنوان بردار هادی این خط انتخاب کنیم. با توجه به اینکه یک بردار نرمال صفحه‌ی $z=e$ بردار $\mathbf{k}$ است، بردار هادی خط مورد نظر عبارت است از

$$\nabla g(P_0)\times\mathbf{k}=\left(\sqrt{2}e\mathbf{i}+\sqrt{2}e\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)\times\mathbf{k}=-\sqrt{2}e\mathbf{j}+\sqrt{2}e\mathbf{i}=\sqrt{2}e\mathbf{i}-\sqrt{2}e\mathbf{j}$$

پس معادلات پارامتری این خط به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

(راه حل دوم) ابتدا معادلات پارامتری خم حاصل از برخورد رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ را به دست می‌آوریم.

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y,x)\in S \text{ و } z=e\}=\{(x,y,e)\in\mathbb{R}^3 \mid e^{(x^2+y^2)}=e \text{ یا } x^2+y^2=1\}$$

بنابر این C دارای معادلات پارامتری $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=e \end{cases}$، $t\in[0,2\pi]$، است. نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ است. اگر قرار دهیم $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+e\mathbf{k}$ آنگاه $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{i}+\cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ بردار هادی خط مماس بر این خم در نقطه‌ی نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ خواهد بود. در نتیجه معادلات پارامتری خط مورد نظر عبارتند از

$$L:\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که در حالت اخیر بردار هادی خط به دست آمده، ضریبی از بردار هادی به دست آمده در روش قبلی است.